

LE MATRICI: L'INVERSA

A matrice quadrata di ordine n



Si definisce **inversa** di A una matrice A^{-1}
quadrata di ordine n tale che risulti:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

LE MATRICI: L'INVERSA

A matrice quadrata di ordine n



l'inversa di A esiste se e solo se

$$\det A \neq 0$$

L'INVERSA DI A È UNICA!!!

LE MATRICI: IL CALCOLO DELL'INVERSA

Primo metodo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

A^* è la matrice dei complementi algebrici

LE MATRICI: IL CALCOLO DELL'INVERSA

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det \mathbf{A} = -1 \neq 0$$



esiste l'inversa di $\mathbf{A}$

**calcoliamo la matrice dei
complementi algebrici A^* di**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{c}_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$\mathbf{c}_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{12} = 0$$

$$\mathbf{c}_{13} = (-1)^{i+j} \cdot m_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{13} = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{c}_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{21} = 1$$

$$\mathbf{c}_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{22} = 1$$

$$\mathbf{c}_{23} = (-1)^{i+j} \cdot m_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{23} = 2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{c}_{31} = (-1)^{i+j} \cdot m_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{31} = 0$$

$$\mathbf{c}_{32} = (-1)^{i+j} \cdot m_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{32} = 1$$

$$\mathbf{c}_{33} = (-1)^{i+j} \cdot m_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{33} = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica!!!

L'inversa trovata è quella giusta se sono soddisfatte contemporaneamente le seguenti identità:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+1-2 & -1+2 & 2-2 \\ 1-1 & -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & -1+2 & -2+2 \\ -1+1 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

LE MATRICI: OPERAZIONI ELEMENTARI

A matrice di ordine $m \times n$



Si definisce **ridotta per riga** di A una matrice di ordine $m \times n$ avente in ogni riga un elemento *speciale* non nullo al di sotto del quale tutti gli elementi sono nulli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è ridotta di ordine 4



$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = 1$$

$$a_{32} = 1$$

sono gli elementi speciali di $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è ridotta di ordine **4×5**



$$a_{12} = 2$$

$$a_{23} = 1$$

$$a_{34} = 5$$

sono gli elementi speciali di **A**

A matrice non ridotta di ordine ***m***×***n***



operazioni elementari sulle righe (o colonne) di A

- ad una riga (o colonna) si sommano gli elementi di un'altra riga (o colonna) moltiplicati per un numero k non nullo
- si scambiano tra di loro due righe (o due colonne)
- si moltiplicano tutti gli elementi di una riga (o colonna) per un numero k non nullo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{R_2} \rightarrow \overline{R_2} - \overline{R_3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{R_4} \rightarrow \overline{R_4} - 2\overline{R_5}]{\overline{R_3} \rightarrow 2\overline{R_3} - \overline{R_1}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 0 & -5 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_5 \rightarrow R_5 - R_1}]{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - R_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$



**$\mathbf{B}$ è una matrice ridotta ottenuta
dalla matrice $\mathbf{A}$ non ridotta**

LE MATRICI: IL CALCOLO DELL'INVERSA

Secondo metodo

Si procede per passi successivi:

- accostare ad A la matrice identità I dello stesso ordine di A , ovvero formare $[A|I]$
- applicare alla matrice $[A|I]$ le operazioni elementari così da ottenere la nuova matrice $[I|B] = [I|A^{-1}]$

LE MATRICI: IL CALCOLO DELL'INVERSA

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{cfr. slide 4}) \quad \longrightarrow \quad \text{esiste l'inversa di } A$$

$$[A | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

trasformiamo la matrice A in I_3

attraverso le operazioni elementari

$$[A | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\overline{R_2} \rightarrow \overline{R_2} - \overline{R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\overline{R_3} \rightarrow \overline{R_3} - \overline{R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\overline{R_3} \rightarrow -\overline{R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\overline{R_2} \rightarrow \overline{R_2} - 2\overline{R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [I_3 | A^{-1}] \quad (\text{cfr. slide 8})$$